学术论文

基于某些常见蕴涵算子的模糊推理反向三I约束算法*

彭家寅

内江师范学院数学系，内江 641112

摘要 讨论了FMP，FMT问题的反向三I约束算法解的存在惟一性条件，分别给出了几个常见蕴涵算子的FMP问题与FMT问题的反向三I约束算法解的计算公式. 进而将问题一般化，给出了FMP与FMT问题的α-反向三I约束算法解的存在惟一性条件，并得到了基于这些蕴涵算子的α-反向三I约束算法相应的计算公式.

关键词 模糊推理 蕴涵算子 反向三I约束算法 α-反向三I约束算法 解的存在惟一性

众所周知，模糊推理的核心问题是以下形式的FMP(fuzzy modus ponens)和FMT(fuzzy modus tollens)：

规则	$A \to B$		规则	$A \to B$	
输入	A^*		输入		B^*
输出		B^*	输出	A^*	

这里，A，A^*是论域X上的模糊集，B，B^*是论域Y上的模糊集.

对于上述两类问题，美国控制论专家及模糊集理论创始人Zadeh于1973年提出了模糊推理中著名的求解FMP和FMT问题的CRI(compositional rule of inference)算法[1]. 由于模糊推理适用于含有模糊的不确定性推理并且贴近人类的思维模式，所以模糊推理一经提出，就受到了广泛的关注，很快就涌现出一大批理论性的与应用性的研究成果，特别是以模糊控制为核心的模糊技术已经被广泛地应用于许多工业和科研领域，取得了显著的经济效益. 然而，模糊推理远较经典逻辑学中的二值推理复杂. 从应用的角度看，似乎很难找到一种普遍适用于各种不同领域的模糊推理方法. 而且基于CRI方法的模糊系统本质上是一种插值器[2]，应用此系统在研究模糊系统的函数逼近问题时，不可避免地出现"规则爆炸"的现象. 从理论角度看，Zadeh的CRI算法及其演变[3]的推理机制也似乎有值得推敲之处[4]. 因此，近年来模糊推理基础和推理方法的问题受到极大的关注. 我国学者王国俊于1999年提出了著名的模糊推理全蕴涵三I算法[4-6]，有效地改进了经典的CRI算法，并将之纳入到模糊逻辑的框架之中.

宋士吉等于2002年从如何设计模糊系统，使得在给定的精度下模糊规则库中的元素个数最小的角度出发，提出了反向三I支持算法[7]，并沿着这个思路在同年提出了模糊推理的反向三I约束算法[8]，其基本思想分别是：

反向三I约束算法：已知$A \in F(X)$和$B \in F(Y)$，并且$A^* \in F(X)$(或$B^* \in F(Y)$)，寻求最小的$B^* \in F(Y)$(或最大的$A^* \in F(X)$)，使得

2005-06-30 收稿，2005-08-08 收修改稿

E-mail：pengjiayin@njtc.edu.cn

$$(A^*(x) \to B^*(y)) \to (A(x) \to B(y)), \quad (1)$$

对一切 $x \in X$ 与 $y \in Y$ 具有最小逻辑真值，其中 $F(X)$ 与 $F(Y)$ 分别为 X 与 Y 上的全体模糊集之集.

反向三I约束算法的一般化形式：在(1)的前提下，对于给定的 $\alpha \in (0, 1]$，寻求最小的 $B^* \in F(Y)$(或最大的 $A^* \in F(X)$)，使得

$$(A^*(x) \to B^*(y)) \to (A(x) \to B(y)) \leqslant \alpha, \quad (2)$$

对一切 $x \in X$ 与 $y \in Y$ 成立.

为了方便，我们把上述两种 FMP 问题(或 FMT 问题)关于蕴涵算子 $R = \to$ 的解分别称为 FMP 问题(FMT 问题)的 R-型反向三I约束解、α-反向三I约束解.

该文并针对蕴涵算子

$$R_0 : [0,1]^2 \to [0,1], R_0(a,b) = \begin{cases} 1, a \leqslant b, \\ a' \vee b, a > b, \end{cases} \quad (a' = 1 - a)$$

分别给出了相应的 FMP 与 FMT 问题解的计算公式. 在以上工作的基础上，本文讨论了 FMP，FMT 问题的反向三I约束解的存在性和惟一性条件，分别给出了几个常见蕴涵算子的 FMP 问题与 FMT 问题相应的两种反向三I约束解的计算公式.

1 基于某些常见蕴涵算子的反向三I约束算法

本文考虑模糊系统中使用较多的如下五个蕴涵算子：Kleene-Dienes 蕴涵算子：$R_{KD}(a, b) = a' \vee b$；Reichenbach 蕴涵算子：$R_R(a, b) = a' + ab$；Lukasiewicz 蕴涵算子：$R_{Lu}(a, b) = 1 \wedge (a' + b)$；Goguen 蕴涵算子：$R_G(a, b) = \frac{b}{a} \wedge 1$，其中约定 $\frac{b}{0} = 1$；Yager 蕴涵算子：$R_Y(a, b) = b^a$，其中约定 $0^0 = 1$.

1.1 FMP 问题的反向三I约束算法

关于(1)式的 FMP 问题解的存在惟一条件，有如下结论：

定理 1.1.1 (i) 若 $R = \to : [0, 1]^2 \to [0, 1]$ 关于第一变量不增，且关于第二变量不减，则(1)式的最小值为

$$M(x,y) = (A^*(x) \to 1) \to (A(x) \to B(y)).$$

(ii) 进一步，若 R 关于第一变量与第二变量都是右连续的，则 FMP 问题的 R-型反向三I约束解是存在惟一.

证 (i) 因 R 关于第二变量不减，则 $\forall B^* \in F(Y)$，$(A^*(x) \to 1) \geqslant (A^*(x) \to B^*(y))$. 又 R 关于第一变量不增，我们有

$$(A^*(x) \to 1) \to (A(x) \to B(y)) \leqslant (A^*(x) \to B^*(y)) \to (A(x) \to B(y)),$$

即结论成立.

(ii) 记 $\Omega = \{B_t \in F(Y) \mid (A^*(x) \to B_t(y)) \to (A(x) \to B(y)) = M(x, y), x \in X, y \in Y\}$，由 $1 \in \Omega$ 知 Ω 非空. 令 $B^* = \wedge \{B_t \in \Omega\}$，则 $\forall y \in Y$，必存在某 t_0 使得 $B^*(y) = B_{t_0}(y)$. 否则，Ω 中必有序列 B_{t_1}，B_{t_2}，B_{t_3}，…使得

$$B^*(y) = \lim_{n \to \infty} B_{t_n}(y).$$

由 $B_{t_n}(y) > B^*(y)$，所以上式表明 $B^*(y)$ 是 $\{B_{t_n}(y)\}$ 的右极限. 因 $R(\cdot, y)$ 和 $R(x, \cdot)$ 都是右连续的，且 $B_{t_n} \in \Omega$，因此

$$(A^*(x) \to B^*(y)) \to (A(x) \to B(y)) = M(x,y),$$

故 $B^* \in \Omega$，与假设矛盾.

定理 1.1.2 若 $R = \to$ 是 Kleene-Dienes 蕴涵，则 FMP 问题 R-型反向三I约束解 B^* 由下式给出，

$$B^*(y) = \bigvee_{x \in E_y} \{1 - R(A(x), B(y))\}, y \in Y,$$

其中 $E_y = \{x \in X \mid A^*(x) > R_{KD}(A(x), B(y))\}$.

证 由于 Kleene-Dienes 蕴涵 R 满足定理 1.1.1 的两个条件，故其解是存在惟一的. 按 R 的定义知(1)的值为

$$[A^*(x) \wedge (B^*(y))'] \vee R(A(x), B(y)), \quad (3)$$

这里 y，A，B 与 A^* 都已固定，要求对一切可能的 x，$B^*(y)$能使(3)式的值最小. 因为 y 已固定，为了书写简便，记 $R(A(x), B(y))$为 $M(x)$，则(3)式可写为

$$[A^*(x) \wedge (B^*(y))'] \vee M(x) . \qquad (4)$$

如果 x 使得 $A^*(x) \leqslant M(x)$，则(4)式可化简为 $M(x)$. 因 $B^*(y)$ 不出现，(4)式是否取最小与 $B^*(y)$的值无关. 如果 $A^*(x) > M(x)$，则由分配律知(4)式可化为 $A^*(x) \wedge [M(x) \vee (B^*(y))']$，其最小可能值为 $M(x)$，可于$(B^*(y))' \leqslant M(x)$时达到，从而 $B^*(y) \geqslant 1 - M(x)$.

综上所述并注意到 $B^*(y)$ 应是 $F(Y)$中具有上述性质的最小模糊集便得结论.

类似地，对于上述其余四个蕴涵算子有如下三个结论：

定理 1.1.3　若 $R = \rightarrow$是 Reichenbach 蕴涵算子，则 FMP 问题 R-型反向三 I 约束解 B^* 由下式给出，

$$B^*(y) = \begin{cases} 1, y \in E, \\ 0, y \in Y \backslash E, \end{cases}$$

这里 $E = \{y \in Y \mid \sup\limits_{x \in X}\{A^*(x) R'_R(A(x), B(y))\} > 0\}$.

定理 1.1.4　若 $R = \rightarrow$是 Lukasiewicz 蕴涵算子，则 FMP 问题 R-型反向三 I 约束解 B^* 由下式给出，

$$B^*(y) = \bigvee_{x \in E_y} \{A^*(x)\}, y \in Y ,$$

这里 $E_g = \{x \in X \mid R_{Lu}(A(x), B(y)) < 1\}$.

注　关于 Goguen 蕴涵算子 R_G 和 Yager 蕴涵算子 R_Y，文献[9]误认为它们在$[0, 1] \times [0, 1]$上连续. 事实上，$\lim\limits_{x \to 0+} R_G(x, 0) = \lim\limits_{x \to 0+} \left(\frac{0}{x} \wedge 1\right) = 0 \neq R_G(0, 0)$；$\lim\limits_{x \to 0+} R_Y(x, 0) = \lim\limits_{x \to 0+} 0^x = 0 \neq R_Y(0, 0)$，这表明 Goguen 与 Yager 蕴涵在点(0, 0)关于第一变量并不右连续，从而它们并不是$[0, 1] \times [0, 1]$上的连续算子. 由于它们不满足定理 1.2.1 的条件，它们相应 FMP 问题的反向三 I 约束解不一定存在. 我们仅以 R_G 算子为例来说明如下：取 $A^*(y) \equiv \frac{1}{2}$ 且 $R(A(x), B(y)) \equiv 0$，则(1)式为 $1 \wedge [0/(2B^*(y) \wedge 1)]$，按 R_G 的定义，要使上式最小，当且仅当 $B^*(x) > 0$. 这表明，使(1)式最小的 $F(y)$ 中的最小的模糊集 B^* 是不存在的.

1.2　FMT 问题的反向三 I 约束算法

关于(1)式的 FMT 问题解的存在惟一条件，有如下结论：

定理 1.2.1　(i) 若 $R = \rightarrow : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ 关于第一变量不增，则(1)式的最小值为

$$N(x,y) = (0 \rightarrow B^*(y)) \rightarrow (A(x) \rightarrow B(y)) .$$

(ii) 进一步，若 R 关于第一变量连续，则 FMT 问题的 R-型反向三 I 约束解存在惟一.

证　(i) $\forall A^* \in F(X)$，有 $A^*(x) \geqslant 0$，因 R 关于第一变量不增，所以 $A^*(x) \rightarrow B^*(y) \leqslant 0 \rightarrow B^*(y)$，从而

$$(A^*(x) \rightarrow B^*(y)) \rightarrow (A(x) \rightarrow B(y)) \geqslant$$
$$(0 \rightarrow B^*(y)) \rightarrow (A(x) \rightarrow B(y)) ,$$

故结论成立.

(ii) 记 $\Lambda = \{A_i \in F(X) \mid (A_i(x) \rightarrow B^*(y)) \rightarrow (A(x) \rightarrow B(y)) = N(x, y), x \in X, y \in Y\}$，由 $0 \in \Lambda$知Λ 非空. 令 $A^* = \vee\{A_i \mid A_i \in \Lambda\}$，则 $\forall x \in X$，必存在某 $A_{i_0} \in \Lambda$ 使得 $A_{i_0}(x) = A^*(x)$. 因反之，则在 Λ 中必有序列$\{A_{i_n}\}$使得

$$\lim_{n \to \infty} A_{i_n}(x) = A^*(x) \text{ 且 } A_{i_n}(x) < A^*(x) .$$

这表明 $A^*(x)$是$\{A_{i_n}(x)\}$的左极限. 因 R 关于第一变量连续，故

$$N(x,y) = (A^*(x) \rightarrow B^*(y)) \rightarrow (A(x) \rightarrow B(y)) ,$$

于是 $A^*(x) \in \Lambda$，矛盾.

对于 Kleene-Dienes 蕴涵算子 R 有：$\forall a, b \in [0, 1]$，$R(a, b) = R(b', a')$. 因此由定理 1.1.2 可得如下结论：

定理 1.2.2　若 $R = \rightarrow$是 Kleene-Dienes 蕴涵，则 FMT 问题 R-型反向三 I 约束解 A^* 由下式给出，

$$A^*(x) = \bigwedge_{y \in E_x} \{R_{KD}(A(x), B(y))\}, x \in X ,$$

其中 $E_x=\{y\in Y \mid B^*(y)<R'_{KD}(A(x),\ B(y))\}$.

对于其余蕴涵算子，我们仿照定理 1.1.2 的讨论可得如下结论：

定理 1.2.3 若 $R=\rightarrow$是 Reichenbach 蕴涵，则 FMT 问题 R-型反向三 I 约束解 A^* 由下式给出，

$$A^*(x)=\begin{cases}0, x\in E,\\ 1, x\in X\backslash E,\end{cases}$$

其中 $E=\{x\in X \mid \sup_{y\in Y}\{R'_R(A(x),\ B(y))(B^*(y))'\}>0\}$.

定理 1.2.4 若 $R=\rightarrow$是 Lukasiewicz 蕴涵，则 FMT 问题 R-型反向三 I 约束解 A^* 由下式给出，

$$A^*(x)=\bigwedge_{y\in E_x}\{B^*(y)\}, x\in X,$$

其中 $E_x=\{y\in Y \mid R_{Lu}(A(x),\ B(y))<1\}$.

定理 1.2.5 若 $R=\rightarrow$是 Goguen 蕴涵，则 FMP 问题 R-型反向三 I 约束解 A^* 由下式给出，

$$A^*(x)=\begin{cases}0, & x\in F,\\ \bigwedge_{y\in E_x}\{B^*(y)\}, & x\in X\backslash F,\end{cases}$$

其中 $E_x=\{y\in Y \mid 0<R_G(A(x),\ B(y))<1$ 且 $B^*(y)>0\}$，$F=\{x\in X \mid \exists y_0\in Y$ 使得 $B^*(y)=0$ 且 $R_G(A(x),\ B(y_0))<1\}$.

定理 1.2.6 若 $R=\rightarrow$是 Yager 蕴涵，则 FMP 问题 R-型反向三 I 约束解 A^* 由下式给出，

$$A^*(x)=\begin{cases}0, x\in E,\\ 1, x\in X\backslash E,\end{cases}$$

这里 $E=\{x\in X \mid \max_{y\in Y}\{R_Y(A((x),\ B(y)),\ B^*(y)\}<1\}$.

注 由前一节的“注”知，Goguen 蕴涵算子 R_G 和 Yager 蕴涵算子 R_Y 关于第一变量都不连续，因而不满足定理 1.2.1 的条件，但它们相应 FMT 问题的反向三 I 约束解却存在，这表明定理 1.2.1 的条件是充分非必要的.

2 基于某些常见蕴涵算子的 α-反向三 I 约束算法

我们现在仍考虑第 1 节中所提到的五个蕴涵算子.

2.1 FMP 问题的 α-反向三 I 约束算法

由定理 1.1.1 知(1)式的最小值为 $M(x,\ y)=R(R(A^*(x),\ 1),\ R(A(x),\ B(y)))$，因此对于(1)式的 FMP 的一般化问题(2)式应满足的 α 之范围为

$$\alpha\in(R(R(A^*(x),1),R(A(x),B(y))),1].$$

当 $\alpha\in(0,\ R(R(A^*(x),\ 1),\ R(A(x),\ B(y))))$时，FMP 问题的 α-反向三 I 约束算法无解；当 $\alpha=1$ 时，FMP 问题的 α-反向三 I 约束算法的解为 $B^*(x)=0$.

在本节以下部分，我们仅就 α 的如下范围：

$$\alpha\in(R(R(A^*(x),1),R(A(x),B(y))),1) \quad (5)$$

进行讨论. 关于 FMP 问题的 α-反向三 I 约束解的存在惟一性有如下结论：

定理 2.1.1 若 $R=\rightarrow:[0,\ 1]^2\rightarrow[0,\ 1]$关于第一变量不增，关于第二变量不减，并且关于第一和第二变量都是右连续的，则在条件(5)式下，FMP 问题的 R-型 α-反向三约束解是存在惟一的.

证 记 $\Omega=\{B^*\in F(Y) \mid (A^*(x)\rightarrow B^*(y))\rightarrow(A(x)\rightarrow B(y))\leqslant\alpha,\ x\in X,\ y\in Y\}$，则由 $1\in\Omega$ 知 Ω 非空. 令 $\overline{B}=\wedge\{B \mid B\in\Omega\}$，则 $\overline{B}\in F(Y)$. 以下只证明对一切 $x\in X$ 和 $y\in Y$ 都有

$$(A^*(x)\rightarrow\overline{B}(y))\rightarrow(A(x)\rightarrow B(y))\leqslant\alpha, \quad (6)$$

因为 $\overline{B}$ 的最小性是明显的. 反设(6)式不成立，则有 $x_0\in X$ 和 $y_0\in Y$ 使得

$$(A^*(x_0)\rightarrow\overline{B}(y_0))\rightarrow(A(x_0)\rightarrow B(y_0))>\alpha. \quad (7)$$

因 $R(s,\ t)$关于 s 和 t 都右连续，则

$$\lim_{s\rightarrow s_0+}R(s,t_0)=R(s_0,t_0)=\lim_{t\rightarrow t_0+}R(s_0,t). \quad (8)$$

设 $R(A(x_0), B(y_0))=c$，$R(A^*(x_0), \overline{B}(y_0))=d$，则(7)式左边等于 $R(d, c)$. 由 $\overline{B}=\bigwedge_{B\in\Omega}B$ 知 Ω 中有 B_1，B_2，B_3，…使得 $\lim_{n\to\infty}B_n(y_0)=\overline{B}(y_0)$. 注意到 $B_n(y_0)\geqslant\overline{B}(y_0)$，则由(8)式得 $\lim_{n\to\infty}R(A^*(x_0), B_n(y_0))=R(A^*(x_0), \overline{B}(y_0))=d$. 又 $R(s, t)$ 关于 t 为增函数，故 $d\leqslant R(A^*(x_0), B_n(y_0))$ 恒成立，所以再次使用(8)式得

$$\lim_{n\to\infty}R(R(A^*(x_0),B_n(y_0)),c)=R(d,c).$$

从而由(7)式知有 n 使 $R(R(A^*(x_0), B_n(y_0)), c)>\alpha$，即

$$(A^*(x_0)\to B_n(y_0))\to(A(x_0)\to B(y_0))>\alpha,$$

这与 $B_n\in\Omega$ 相矛盾.

定理 2.1.2　若 $R=\to$ 是 Kleene-Dienes 蕴涵，则在条件(5)式下，FMP 问题的 R-型 α-反向三 I 约束解 B^* 为

$$B^*(y)=\begin{cases}1-\alpha, y\in E,\\ 0, y\in Y\backslash E,\end{cases}$$

其中 $E=\{y\in Y \mid \sup_{x\in X}A^*(x)>\alpha\}$.

证　对任意的 $y\in Y$ 与满足 $C(y)\geqslant B^*(y)$ 的 $C(y)\in F(Y)$，$C(y)$ 必使得(2)式成立. 事实上，根据 Kleene-Dienes 蕴涵关于第一变量不增，关于第二变量不减的性质知

$$\begin{aligned}&(A^*(x)\to C(y))\to(A(x)\to B(y))\leqslant\\&(A^*(x)\to B^*(y))\to(A(x)\to B(y))=\\&[(A^*(x))'\vee B^*(y)]'\vee R_{\mathrm{KD}}(A(x),B(y))=\\&[A^*(x)\wedge(B^*(y))']\vee R_{\mathrm{KD}}(A(x),B(y)).\end{aligned}$$

对任意的 $x\in X$，由条件(5)式知 $\alpha>R_{\mathrm{KD}}(A(x), B(y))$，于是

$$[A^*(x)\wedge(B^*(y))']\vee R_{\mathrm{KD}}(A(x),B(y))\leqslant \alpha\vee\alpha=\alpha$$

无论对任何 $y\in Y$ 均成立，故 $C(y)$ 使得(2)式成立.

另一方面，若存在某一 $y_0\in Y$ 满足 $D(y_0)<B^*(y_0)$，则 $D(y_0)$ 不会使得(2)式成立. 事实上，由此蕴涵算子的性质知

$$\begin{aligned}&(A^*(x)\to D(y_0))\to(A(x)\to B(y_0))=\\&[A^*(x)\wedge(D(y_0))']\vee R_{\mathrm{KD}}(A(x),B(y_0)).\end{aligned}\tag{9}$$

现分情况讨论如下：

情形 1：当 $y_0\in E$ 时，$\exists x_0\in X$，$B^*(y_0)=1-\alpha$，$A^*(x_0)>\alpha$，从而在 x_0 处 $(D(y_0))'>\alpha$，即(9)式的右端之值不恒小于或等于 α，故 $D(y_0)$ 不会使(2)式对一切 $x\in X$ 与 $y\in Y$ 成立.

情形 2：当 $y_0\notin E$ 时，$B^*(y_0)=0$，从而满足 $D(y_0)<B^*(y_0)$ 的 $D\in F(Y)$ 不存在，因而其不会使(2)式成立.

综上所述，$B^*(y)$ 是使(2)式成立的 $F(Y)$ 中的最小模糊集.

类似地可得到第1节中其余的4个蕴涵算子的 FMP 问题的 α-反向三 I 约束算法公式：

定理 2.1.3　若 $R=\to$ 是 Reichenbach 蕴涵，则在条件(5)式下，FMP 问题的 R-型 α-反向三 I 约束解 B^* 由下式给出，

$$B^*(y)=\bigvee_{x\in E_y}\left\{1-\frac{\alpha-R_{\mathrm{R}}(A(x),B(y))}{A^*(x)R'_{\mathrm{R}}(A(x),B(y))}\wedge 1\right\}, y\in Y,$$

这里 $E_y=\{x\in X \mid A^*(x)R'_{\mathrm{R}}(A(x), B(y))\neq 0\}$.

定理 2.1.4　若 $R=\to$ 是 Lukasiewicz 蕴涵，则在条件(5)式下，FMP 问题的 R-型 α-反向三 I 约束解 B^* 由下式给出，

$$B^*(y)=\bigvee_{x\in E_y}\{A^*(x)+R_{\mathrm{Lu}}(A(x),B(y))-\alpha\}, y\in Y,$$

其中 $E_y=\{x\in X \mid A^*(x)+R_{\mathrm{Lu}}(A(x), B(y))>\alpha\}$.

注　类似于第1.1节的“注”的讨论，我们可得：关于 Goguen 与 Yager 蕴涵算子的 FMT 问题的 α-反向三 I 约束解不一定存在.

2.2　FMT 问题的 α-反向三 I 约束算法

由定理 1.2.1 知(1)式的最小值为 $N(x, y)=R(R(0,B^*(y)), R(A(x), B(y)))$，因此对于(1)式的 FMT 的一般化问题(2)式应满足的 α 之范围是

$$\alpha \in (R(R(0,B^*(y)),R(A(x),B(y))),1].$$

当 $\alpha\in(0,\ R(R(0,\ B^*(y)),\ R(A(x),\ B(y))))$ 时，FMT 问题的 α-反向三 I 约束算法无解；当 $\alpha=1$ 时，FMT 问题的 α-反向三 I 约束算法的解为 $A^*(x)=1$.

在本节以下部分，我们仅就 α 的如下范围：

$$\alpha \in (R(R(0,B^*(y)),R(A(x),B(y))),1) \tag{10}$$

进行讨论. 关于 FMT 问题的 α-反向三 I 约束解的存在性有如下结论：

定理 2.2.1 若 $R=\to:[0,\ 1]^2\to[0,\ 1]$ 关于第一变量不增且连续，则在条件(10)式下，FMT 问题的 R-型 α-反向三 I 约束解是存在惟一的.

证 记 $\Lambda=\{A^*\in F(X)\mid(A^*(x)\to B^*(y))\to(A(x)\to B(y))\leqslant\alpha,\ x\in X,\ y\in Y\}$，则由 $0\in\Lambda$ 知 Λ 非空. 令 $\overline{A}=\vee\{A\mid A\in\Lambda\}$，则 $\overline{A}\in F(X)$. 以下仅证明对一切 $x\in X$ 和 $y\in Y$ 都有

$$(\overline{A}(x)\to B^*(y))\to(A(x)\to B(y))\leqslant\alpha\ , \tag{11}$$

因 $\overline{A}$ 的最小性是明显的. 反设(11)式不成立，则存在 $x_0\in X$ 和 $y_0\in Y$ 满足

$$(\overline{A}(x_0)\to B^*(y_0))\to(A(x_0)\to B(y_0))>\alpha\ .$$

由 $\overline{A}=\vee\{A\mid A\in\Lambda\}$ 知，在 Λ 中存在序列 $\{A_n\}$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n(x_0)=\overline{A}(x_0)$ 且 $A_n(x_0)<\overline{A}(x_0)$，$\forall n\in N$. 由 $R(s,\ t)$ 关于 s 连续知

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}R(R(A_n(x_0),B^*(y_0)),R(A(x_0),B(y_0)))=\\&R(\lim_{n\to\infty}R(A_n(x_0),B(y_0)),R(A(x_0),B(y_0)))=\\&R(R(\lim_{n\to\infty}A_n(x_0),B^*(y_0)),R(A(x_0),B(y_0)))=\\&R(R(\overline{A}(x_0),B(y_0)),R(A(x_0),B(y_0)))>\alpha\ .\end{aligned}$$

于是存在 A_n 使得 $R(R(A_n(x_0),\ B^*(y_0)),\ R(A(x_0),\ B(y_0)))>\alpha$，这与 $A_n\in\Lambda$ 矛盾.

与得到定理 1.2.2 的道理一样，由定理 2.1.2 直接可得如下结论：

定理 2.2.2 若 $R=\to$ 是 Kleene-Dienes 蕴涵，则在条件(10)式下，FMT 问题的 R-型 α-反向三 I 约束解 A^* 由下式给出，

$$A^*(x)=\begin{cases}\alpha, x\in E,\\1, x\in X\backslash E,\end{cases}$$

这里 $E=\{x\in X\mid\sup\limits_{y\in Y}(B^*(y))'>\alpha\}$.

对于其余 4 个蕴涵算子，我们可仿照定理 2.1.2的讨论得到有关结论如下：

定理 2.2.3 若 $R=\to$ 是 Reichenbach 蕴涵，则在条件(10)式下，FMT 问题的 R-型 α-反向三 I 约束解 A^* 由下式给出，

$$A^*(x)=\bigwedge_{y\in E_x}\left\{\frac{\alpha-R_R(A(x),B(y))}{R'_R(A(x),B(y))(B^*(y))'}\wedge 1\right\}, x\in X,$$

其中 $E_x=\{y\in Y\mid(B^*(y))'\neq 0\}$.

定理 2.2.4 若 $R=\to$ 是 Lukasiewicz 蕴涵，则在条件(10)式下，FMT 问题的 R-型 α-反向三 I 约束解 A^* 由下式给出，

$$A^*(x)=\bigwedge_{y\in Y}\{(\alpha+B^*(y)-R_{Lu}(A(x),B(y)))\wedge 1\}, x\in X.$$

定理 2.2.5 若 $R=\to$ 是 Goguen 蕴涵，则在条件(5)式下，FMP 问题的 R-型 α-反向三 I 约束解 A^* 由下式给出，

$$A^*(x)=\begin{cases}0, & x\in F,\\ \bigwedge\limits_{y\in E_x}\left\{\dfrac{\alpha B^*(y)}{R_G(A(x),B(y))}\wedge 1\right\}, & x\in X\mid F,\end{cases}$$

其中 $F=\{x\in X\mid\min\limits_{y\in Y}B^*(y)=0\}$，$E_x=\{y\in Y\mid 0<R_G(A(x),\ B(y)),\ 0<B^*(y)<1\}$.

定理 2.2.6 若 $R=\to$ 是 Yager 蕴涵，则在条件(5)式下，FMP 问题的 R-型 α-反向三 I 约束解 A^* 由下式给出，

$$A^*(x)=\begin{cases}0, & x\in F,\\ \bigwedge\limits_{y\in E_x}\{1\wedge\log_{B^*(y)}(\log_{R_Y(A(x),B(y))}\alpha)\}, & x\in X\backslash F,\end{cases}$$

这里 $F=\{x\in X \mid \min_{y\in Y}B^*(y)=0\}$，$E_x=\{y\in Y \mid 0<R_Y(A(x), B(y)), 0<B^*(y)<1\}$.

注 类似于第1.2节的“注”的讨论，我们可知定理2.2.1的条件是充分而非必要的.

参 考 文 献

1 Zadeh L A. Outline of new approach to the analysis of complex systems and decision processes. IEEE Trans Sys Man Cybern, 1973, 3(1): 28–44
2 李洪兴. 模糊控制的插值机理. 中国科学, E辑, 1998, 28(3): 259—267
3 Dubois D, Prade H. Fuzzy sets in approximate reasoning. Fuzzy Sets and Systems, 1991, 40(1): 143–244
4 王国俊. 非经典数理逻辑与近似推理. 北京: 科学出版社, 2000
5 王国俊. 模糊推理的全蕴涵三I算法. 中国科学, E辑, 1999, 29(1): 43—53
6 王国俊. 模糊推理的一个新方法. 模糊系统与数学, 1999, 13(3): 1–10
7 宋士吉, 吴 澄. 模糊推理的反向三I支持算法. 中国科学, E辑, 2002, 32(2): 230–246
8 宋士吉, 吴 澄. 模糊推理的反向三I约束算法. 自然科学进展, 2000, 12(1): 95—100
9 龙 飞, 冯艳宾, 李洪兴. 模糊蕴涵算子及其构造. 北京师范大学学报, 2003, 39(5): 606–611

第二届国际水杉研讨会将于2006年8月在美国举行

水杉现存种“*Metasequoia glyptostroboides Hu et Cheng*”20世纪40年代在中国中南地区的发现被誉为20世纪最有影响的科学发现之一. 这一发现是中美两国科学家密切合作的结果. 在水杉发现后的短短数年内，通过美国和中国科学家的共同努力，水杉被引种到北美各地和世界各国植物园. 美国因此成为水杉的“第二故乡”，被美国哈佛大学树木园评为20世纪的“世纪树”.

“第二届国际水杉研讨会”(The 2nd International *Metasequoia* Symposium-- *Metasequoia* and Associate Plants: Evolution, Physiology, Horticulture, and Conservation)将于2006年8月6—10日在美国举行(8月11—13日会后考察). 这次会议的主题将以水杉的演化、生理学、园艺学以及保护等为主，并将议题扩大到与水杉有关的植物类群. 会议将分为“现代水杉研讨”和“化石水杉研讨”两个部分，分别在美国罗德岛州的布莱恩特大学(Bryant University)和康涅迪格州的耶鲁大学(Yale University)两个校园举行. 会议还安排了会前和会后共三条实验基地和野外栽培水杉考察路线供与会代表参加，其中包括最早引种水杉的哈佛大学(Harvard University)树木园.

会议的主办单位为布莱恩特大学和耶鲁大学，拟定交流的主题为：化石记录、古地理分布、地球化学信息、古气候重建、形态学、生殖生物学、生态学、遗传学、园艺学以及濒危物种保护等等. 会议的第一轮通知及有关信息可在 web. bryant. edu/～china 上查询.

会议执行主席：Prof. Dr. Hong Yang (杨洪)：College of Arts & Sciences, Bryant University, 1150 Douglas Pike, Smithfield, RI 02917, USA. Tel: 001-401-232-6223, Fax: 001-401-232-6416, Email: hyang@bryant. edu.

Prof. Dr. Leo Hickey: Department of Geology & Geophysics, Yale University, P. O. Box 208109, New Haven, CT 06520-8109, USA. Tel: 001-203-432-5006, Fax: 001-203-432-9816, Email: leo. hickey@yale. edu.

（供稿：杨 洪）